作业九 （12月22日课堂上交）

1. 本次作业，仍然是关于定义的。

我们课上定义群在集合上之作用的相悖性的时候，使用的都是类似“一分为二，每份大小不变”的定义。自然的问题就是，如果将“一分为二”换成“一分为三”（或者更一般的，“一分为 n ”），得到的是不是同一种现象？

a) 假设群 G 作用在集合 X 上，满足如下的相悖性：

存在 X 的两两互不相交的子集 $A_1, \cdots, A_m$ 和 $B_1, \cdots, B_n$ （其中 $A_i \cap B_j = \varnothing$ ，$\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ ，$A_i \cap A_j = \varnothing$ ，$\forall 1 \le i \ne j \le m$ ，并且 $B_i \cap B_j = \varnothing$ ，$\forall 1 \le i \ne j \le n$ ），以及 G 中元素 $a_1, \cdots, a_m$ 和 $b_1, \cdots, b_n$ ，使得

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{m} a_i(A_i) = \bigsqcup_{j=1}^{n} b_j(B_j) \text{。}$$

证明：一定存在 X 的两两互不相交（两两互不相交的含义和上面类似）子集 $C_1, \cdots, C_p$ 、 $D_1, \cdots, D_q$ 和 $F_1, \cdots, F_r$ 以及 G 中元素 $c_1, \cdots, c_p$ 、$d_1, \cdots, d_q$ 和 $f_1, \cdots, f_r$ ，使得

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{p} c_i(C_i) = \bigsqcup_{j=1}^{q} d_j(D_j) = \bigsqcup_{k=1}^{r} f_k(F_k) \text{。}$$

换言之，需要证明的是，如果可以一分为二，每份“大小不变”，则可以一分为三，每份“大小不变”。

注：这个证明的思路比较直观，并不是太难想到。难点在于如何用数学的语言（而不是日常的口语化语言）将思路转换为严格的证明。这里面涉及到的记号比较多（包括下标），需要选取合适的符号（记号）来表达你的思路，这也是数学专业训练的一个重要部分：用正规的、通用的数学语言来进行清楚、规范、严密的表达。

b) 证明 a) 之逆。换言之，证明：如果可以一分为三，每份“大小不变”，则可以一分为二，每份“大小不变”。

提示：Banach-Schröder-Bernstein定理。

注：基于a)之结论 + b)之结论 + 数学归纳法，不难得到，“一分为二，每份大小不变”，“一分为三，每份大小不变”和“一分为 n，每份大小不变”，描述的都是同一种现象。

注：定义的难点（或者说关键点），不在于形式的写出一个所谓定义，而在于真正明白/理解你所要定义/描述的现象。